مراجعة حل جملة معادلات خطية غير متجانسة

تذكير حول حل جملة المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_r \end{aligned}$$

يمكننا كتابة هذا النظام في شكل مصفوفة

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

A تسمى مصفوفة العوامل و ترتيبها mnx

x هو مصفوفة عمود متكونة من n مجهول

b هو مصفوفة عمود متكونة من m ثابت

الحالة 1

لما : m = n

إذا كانت رتبة A تساوي n أي أنها غير شاذة فإن الحل يكون وحيدا

إذا كانت رتبة Aاقل من n أي أنها شاذة توجد حالتين

إما أن هناك حلول لانهائية ؛ إذا كانت رتبة A مساوية لرتبة [A |B]

.إما أنه لا يوجد حل إذا كانت رتبة A غير مساوية لرتبة [A |B]

الحالة 2

لما : m >n

هنا نعتبر الجملة التي يكون فيها عدد المعادلات أكبر من عدد المتغيرات

يمكن ظهور ثلاث حالات

إما أن هناك حل واحد ؛ إذا كانت رتبة A تساوي n

إما أن هناك حلول لانهائية ؛ إذا كانت رتبة A أقل من n و مساوية لرتبة [A |B]

إما أنه لا يوجد حل إذا كانت رتبة A أقل من n و غير مساوية لرتبة [A |B].

الحالة 3

لما : $m < n$

إذا كانت مصفوفة المعاملات بالترتيب. mxn و n >m يكون ترتيب A على الأكثر

m (الرتبة أقل من n)

إذن عندما يكون هناك متغيرات أكثر من المعادلات ، فإن الحل لنا يكون أبدًا وحيدًا

ويترتب على ذلك أن هناك حالتان محتملتان فقط

إما أن هناك حلول لانهائية ؛ إذا كانت رتبة A مساوية لرتبة [A |B]

إما أنه لا يوجد حل إذا كانت رتبة A غير مساوية لرتبة [A |B].

<u>مثال حول طريقة التحويلات الأولية</u>

_حل جملة المعادلات التالية

$$x + y - z = 1$$
$$2x + 3y + z = 3$$
$$x + y + 3z = 2$$

1- نبدأ اولا بكتابة المعادلات على شكل جداء مصفوفات كالتالي

$$AX = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2- نقوم بعدها بكتابة المصفوفة الممددة أو الموسعة [A |b]

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

3- نقوم الآن بعماليات خطية على أسطر المصفوفة الممدة من أجل الحصول على الشكل النظامي جهة المصفوفة A   أي تحويل [A |b] إلى الشكل

$$[A|b] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_s \\ 0 & 1 & 0 & y_s \\ 0 & 0 & 1 & z_s \end{array}\right)$$

حيث أن الشعاع

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}$$

يمثل حلول المعادلة

<u>المرحلة الأولى</u> هي الحصول على الشكل

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

جهة العمود الأول ل[A |b] نلاحظ أنه يجب إضافة 2- إلى السطر 2 للحصول على 0

إذن يجب ضرب كل السطر الأول في -2 وجمعه مع السطر 2

$$\begin{array}{lcccc} & -2 & -2 & 2 & -2 \\ + & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}$$

لنحصل على

$$0 \quad \color{red}{1} \quad \color{red}{3} \quad \color{red}{1}$$

كذلك يجب إضافة -1 إلى السطر 3 للحصول على 0

إذن يجب ضرب كل السطر الأول في -1 وجمعه مع السطر 3

$$\begin{array}{lcccc} & -1 & -1 & 1 & -1 \\ + & 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

لنحصل على

$$0 \quad \color{red}{0} \quad \color{red}{4} \quad \color{red}{1}$$

نعوض الآن الأسطر 2و 3 بالأسطر الجديدة لنجد

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & \color{red}{\mathbf{1}} & \color{red}{\mathbf{3}} & \color{red}{\mathbf{1}} \\ \mathbf{0} & \color{red}{\mathbf{0}} & \color{red}{\mathbf{4}} & \color{red}{\mathbf{1}} \end{array}\right)$$

<u>المرحلة الثانية</u> هي الحصول على الشكل

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

جهة العمود الثاني ل[A |b] بعد المرحلة الأولى

نلاحظ أنه يجب إضافة -1 إلى السطر 1 للحصول على 0

إذن يجب ضرب كل السطر الثاني في -1 وجمعه مع السطر الأول

$$\begin{array}{lcccc} & 0 & -1 & -3 & -1 \\ + & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

لنحصل على

$$1 \quad 0 \quad -4 \quad 0$$

نعوض الآن السطر 1 بالسطر الجديد لنجد

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \mathbf{-4} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

<u>المرحلة الثالثة</u> هي الحصول على الشكل

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أولا نقسم السطر الأخير على 4 لنجد

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \mathbf{-4} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{\frac{1}{4}} \end{array}\right)$$

نلاحظ أنه يجب إضافة -3 إلى السطر 2 للحصول على 0

إذن يجب ضرب كل السطر الثالث في -3 وجمعه مع السطر الثاني

$$\begin{array}{rcccc} & 0 & 0 & -3 & \frac{-3}{4} \\ + & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

لنحصل على

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad \mathbf{\frac{1}{4}}$$

كذلك يجب إضافة -4 إلى السطر 1 للحصول على 0

إذن يجب ضرب كل السطر الثالث في 4 وجمعه مع السطر 1

$$\begin{array}{rcccc} & 0 & 0 & 4 & 1 \\ + & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

لنحصل على

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad \mathbf{1}$$

نعوض الآن الأسطر 2و 1 بالأسطر الجديدة لنجد

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \mathbf{-4} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{\frac{1}{4}} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right)$$

والحل النهائي هو

$$x = 1, y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{4}$$

تتمة حل تمارين السلسلة رقم 2

تمرين 4

حل المعادلات التالية

$$(b)\quad \begin{aligned} x-2y+4z&=2\\ 2x-3y+5z&=3\\ 3x-4y+6z&=7 \end{aligned}$$

$$(c)\quad \begin{aligned} x+y+3z&=1\\ 2x+3y-z&=3\\ 5x+7y+z&=7 \end{aligned}$$

$$(d)\quad \begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3-2x_4+4x_5&=1\\ 2x_1+5x_2-8x_3-x_4+6x_5&=4\\ x_1+4x_2-7x_3+5x_4+2x_5&=8 \end{aligned}$$

حل المعادلات

$$\textbf{(b)}\quad \begin{aligned} \boldsymbol{x-2y+4z}&=\boldsymbol{2}\\ \boldsymbol{2x-3y+5z}&=\boldsymbol{3}\\ \boldsymbol{3x-4y+6z}&=\boldsymbol{7} \end{aligned}$$

1- نبدأ اولا بكتابة المعادلات على شكل جداء مصفوفات كالتالي

$$AX=b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4\\ 2 & -3 & 5\\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\\ 3\\ 7 \end{bmatrix}$$

2- نقوم بعدها بكتابة المصفوفة الممددة [A |b]

$$[A|b]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2\\ 2 & -3 & 5 & 3\\ 3 & -4 & 6 & 7 \end{array}\right)$$

3- نقوم الآن بعماليات خطية على أسطر المصفوفة الممدة من أجل الحصول على الشكل النظامي جهة المصفوفة A

$$[A|b]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2\\ 2 & -3 & 5 & 3\\ 3 & -4 & 6 & 7 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-1}\\ 3 & -4 & 6 & 7 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-6} & \mathbf{1} \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{0}\\ 0 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 2 & -6 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{0}\\ 0 & 1 & -3 & -1\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{array}\right)$$

نلاحظ أن السطر الأخير يحتوي على تناقض

$$0x + 0y + 0z = 3$$

إذن الجملة ليس لها حل (رتبة A أقل من رتبة [A |B])

حل المعادلات

$$(c) \quad \begin{aligned} x + y + 3z &= 1 \\ 2x + 3y - z &= 3 \\ 5x + 7y + z &= 7 \end{aligned}$$

1- نبدأ اولا بكتابة المعادلات على شكل جداء مصفوفات كالتالي

$$AX = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2- نقوم بعدها بكتابة المصفوفة الممددة [A |b]

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

3- نقوم الآن بعماليات خطية على أسطر المصفوفة الممدة من أجل الحصول على الشكل النظامي جهة المصفوفة A

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-14} & \mathbf{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{10} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & -7 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

نلاحظ أن رتبة A أقل من 3 (A rang=2) و تساوي رتبة [A |B]

إذن الجملة لديها عدة حلول

نقوم بإعادة كتابة الجملة

$$x + 10z = 0$$

$$y - 7z = 1$$

$$\Rightarrow x = -10z$$

$$\Rightarrow y = 1 + 7z$$

بعد تثبيت z نجد قيم x و y   نضع z= a إذن الحل هو :

$$(x, y, z) = (-10a, 1 + 7a, a)$$

حل المعادلات

$$(d)\qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 - x_4 + 6x_5 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 8 \end{aligned}$$

$$AX = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

2- نقوم بعدها بكتابة المصفوفة الممددة [A |b]

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

نلاحظ أن ترتيب A هو 3x5

ويترتب على ذلك أن هناك حالتان محتملتان فقط

إما أن هناك حلول لانهائية ؛ إذا كانت رتبة A مساوية لرتبة [A |B]

إما أنه لا يوجد حل إذا كانت رتبة A غير مساوية لرتبة [A |B].

3- نقوم الآن بعماليات خطية على أسطر المصفوفة الممدة من أجل الحصول على

الشكل النظامي جهة المصفوفة A

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} & \mathbf{7} & \mathbf{-2} & \mathbf{7} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-8} & \mathbf{8} & \mathbf{-3} \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{24} & \mathbf{21} \\ 0 & 1 & -2 & \mathbf{0} & \mathbf{-8} & \mathbf{-7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

نلاحظ أنه قد وصلنا إلى الشكل النظامي عند هذه المرحلة ولانستطيع التحويل أبعد من هاته المرحلة

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & 24 & 21 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -2 & \mathbf{0} & -8 & -7 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 \end{array}\right)$$

نلاحظ أن رتبة A=3 (r =A rang=3) و تساوي رتبة [A |B]

إذن الجملة لديها عدة حلول سوف نقوم بتثبيت n -r متغير أي 5-3 = 2 بمعنى نثبت مجهولين و إيجاد 3 مجاهيل بدلالتهما

نقوم بإعادة كتابة الجملة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_4} \\ \boldsymbol{x_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_3 - 24x_5 = 21$$
$$x_2 - 2x_3 - 8x_5 = -7$$
$$x_4 + 2x_5 = 3$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_3 + 24x_5 + 21$$
$$\Rightarrow x_2 = 2x_3 + 8x_5 - 7$$
$$\Rightarrow x_4 = -2x_5 + 3$$

بعد تثبيت

$x_5 = b, \quad x_3 = a$

إذن الحل هو :

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$=$(-\mathrm{a} + 24\mathrm{b} + 21, 2\mathrm{a} + 8\mathrm{b} - 7, \mathrm{a}, 3 - 2\mathrm{b}, \mathrm{b})$

تمرين 5

لتكن جملة المعادلات الخطية التالية

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + \beta z &= 3 \\ x + \beta y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

حدد قيم β بحيث تكون للجملة

أ) حل وحيد ؛

ب) لا يوجد حل ؛

ج) عدد لانهائي من الحلول

أ) حل وحيد ؛

1- نبدأ اولا بكتابة المعادلات على شكل جداء مصفوفات كالتالي

$$AX = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \beta \\ 1 & \beta & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نعلم أنه حتى يكون هناك حل وحيد يجب أن تكون رتبة المصفوفة A كاملة أي مساوية ل 3 في هاته الحالة, و بمعنى أخر محدد A لايكون مساويا ل 0

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \beta \\ 1 & \beta & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{\beta + 2} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta - 1} & \mathbf{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta + 2 \\ \beta - 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 - (\beta + 2)(\beta - 1) = -\beta^2 - \beta + 6$$

حتى يكون محدد A مساويا للصفر يجب أن يكون

$\beta = +2$ أو $\beta = -3$

إذن حتى تقبل الجملة حلا وحيدا فإن يجب على

$\beta \neq +2$ و $\beta \neq -3$

أي أن β ينتمي إلى كل الأعداد الحقيقية ماعدا 2 و 3- و الحل الوحيد متعلق بإختيار قيمة β

الآن ندر س الحالات التي تكون فيها A شاذة أي

$\beta = +2$ أو $\beta = -3$

الحالةالأولى $\beta = -3$

$$\begin{gathered} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = 3 \\ x - 3y + 3z = 2 \end{gathered}$$

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

إذن لدينا تناقض

$$0x + 0y + 0z = 5$$

إذن الجملة ليس لها حل (رتبة A أقل من رتبة [A |B]) لما

$\beta = -3$

الحالةالثانية $\beta = 2$

$$\begin{gathered} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{gathered}$$

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

نلاحظ أن رتبة A=2 (r =A rang=2) و تساوي رتبة [A |B]

إذن الجملة لديها عدة حلول سوف نقوم بتثبيت n -r متغير أي 3-2 = 1 بمعنى نثبت مجهول و إيجاد 2 مجاهيل بدلالته

نقوم بإعادة كتابة الجملة

$$x - 5z = 0$$

$$y + 4z = 1$$

$$\Rightarrow x = 5z$$

$$\Rightarrow y = -4z + 1$$

بعد تثبيت z =a

إذن الحل هو :

$$(x, y, z) = (5a, 1 - 4a, a)$$

تذكير حول حل جملة المعادلات المتجانسة

إذا كانت مصفوفة الثوابت b = 0 نقول عن جملة المعادلات أنها متجانسة و تصبح الجملة

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$$

من الواضح أنه في جملة متجانسة ، فإن رتبة المصفوفة الممددة**[A |B]** تكون دائمًا مساوية لرتبة مصفوفة المعاملات **A**. لذلك ، يوجد دائمًا حل واحد على الأقل لجملة متجانسة,

لدينا احتمالان

إما أن ا لجملة المتجانسة لديه الحل البسيط (التافه) فقط : **(x=0)** **لما** رتبة مصفوفة المعاملات A تساوي n

إما أن ا لجملة المتجانسة لديه الحل التافه ولانهائي من الحلول الأخرى **لما** رتبة مصفوفة المعاملات A تكون أقل من n

<u>تمرين 6</u>

حل في R جملة المعادلات المتجانسة التالية

(a)
$$\begin{aligned} -3x + y + 2z &= 0 \\ -2x + 2z &= 0 \\ -11x + 6y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x + y + 3z + h &= 0 \\ x + 3y + 2z + 4h &= 0 \\ 2x + z - h &= 0 \end{aligned}$$

حل المعادلات

$$\text{(a)} \quad \begin{aligned} -3x + y + 2z &= 0 \\ -2x + 2z &= 0 \\ -11x + 6y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

1- نبدأ اولا بكتابة المعادلات على شكل جداء مصفوفات كالتالي

$$AX = b \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -11 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 - نقوم بعدها بكتابة المصفوفة A فقط و نجري عليها تحويلات أولية لأن b = 0

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -11 & 6 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -11 & 6 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -11 & 6 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -11 & 6 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن رتبة A=2 (r =A rang=2) و هي أقل من 3 أي أن الجملة لها عدد غير منتهي من الحلول

سوف نقوم بتثبيت n -r متغير أي 3-2 = 1 بمعنى نثبت مجهول و إيجاد 2 مجاهيل بدلالته

نقوم بإعادة كتابة الجملة

$$x - z = 0$$

$$y - z = 0$$

$$\Rightarrow x = y = z = a$$

إذن الحل هو :

$$(x, y, z) = (a, a, a)$$

حل المعادلات

$$\text{(b)} \quad \begin{aligned} x + y + 3z + h &= 0 \\ x + 3y + 2z + 4h &= 0 \\ 2x + z - h &= 0 \end{aligned}$$

$$AX = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{-5} & \mathbf{-3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \\ 0 & -2 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-6} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نقوم بإعادة كتابة الجملة

$$x - \tfrac{1}{2}h = 0$$
$$y + \tfrac{3}{2}h = 0$$
$$z = 0$$

$$\Rightarrow x = \tfrac{1}{2}h$$
$$\Rightarrow y = -\tfrac{3}{2}h$$
$$z = 0$$

بعد تثبيت $h = a$

إذن الحل هو :

$$(x, y, z, h) = \left(\frac{1}{2}a, -\frac{3}{2}a, 0, a\right)$$