المحاضرة 1

ج$_1$– الطريقة البيانية: وهي شائعة الاستخدام فقط في البرنامج الذي يحتوي على متغيرين على الأكثر.
ولحل البرنامج الخطي وفق هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

– تحويل القيود من متراجحات إلى معادلات.

– تمثيل هذه المعادلات بيانيا.

– نشطب المناطق التي لاتحقق القيود ، وهي توجد إلى يمين المستقيم في حالة كون القيد "أقل من"، وإلى يساره في حالة كون القيد" أكبر من" . وبهذه العملية نتحصل على منطقة تسمى بمنطقة الحلول العملية الممكنة، وهي في الغالب تشكل مضلعا متعدد الرؤوس.

– البحث عن الحل الأمثل، هذا الأخير يقع دائما عل ركن أو أكثر من أركان منطقة الحلول الممكنة، ولإيجاد هاته النقطة أو النقاط هناك طريقتان:

- ❖ الطريقة الأولى: نقوم بتمثيل دالة الهدف بيانيا ، ثم نرسم خطوطا موازية لها بنفس الميل ، آخر ركن على الشكل يمر به خط موازي لدالة الهدف يكون الحل الأمثل ، هذا بالنسبة للمسائل الخاصة بتعظيم دالة الهدف،أما في المسائل المتعلقة بتدنية هذه الأخيرة ، فأول ركن من أركان منطقة الحلول الممكنة يمر به خط موازي لدالة الهدف يكون هو الحل الأمثل.

بعبارة أخرى نجعل دالة الهدف معدومة ، ونرسم مستقيمها الذي يمر من نقطة المبدأ. إن آخر (أو أول) نقطة يمر بها الخط الموازي لدالة الهدف ، هي نقطة الحل الأمثل، ولإيجاد إحداثياتها نقوم بحل معادلات المستقيمات المتقاطعة.

❖ الطريقة الثانية: بما أن الحل الأمثل يقع على ركن من أركان منطقة الحلول الممكنة أو أكثر ، فإنه بتعويض إحداثيات كل الأركان في دالة الهدف نتحصل على قيمة هذه الأخيرة. والحل الأمثل يكون في النقطة التي تعطينا : أكبر قيمة لدالة الهدف في حالة "التعظيم"، أو أدنى قيمة لها في حالة "التدنية".

تمرين: لدينا البرنامج التالي:

$\text{Max } Z=2X_1+3X_2$

تحت القيود التالية:

$6X_1+4X_2 \leq 30$

$4X_1+5X_2 \leq 20$

$X_2 \leq 3$

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

1- تحويل القيود إلى معادلات:

$6X_1+4X_2=30$

$4X_1+5X_2=20$

$X_2=3$

2- تمثيل المعادلات بيانيا:

- من المعادلة الأولى:

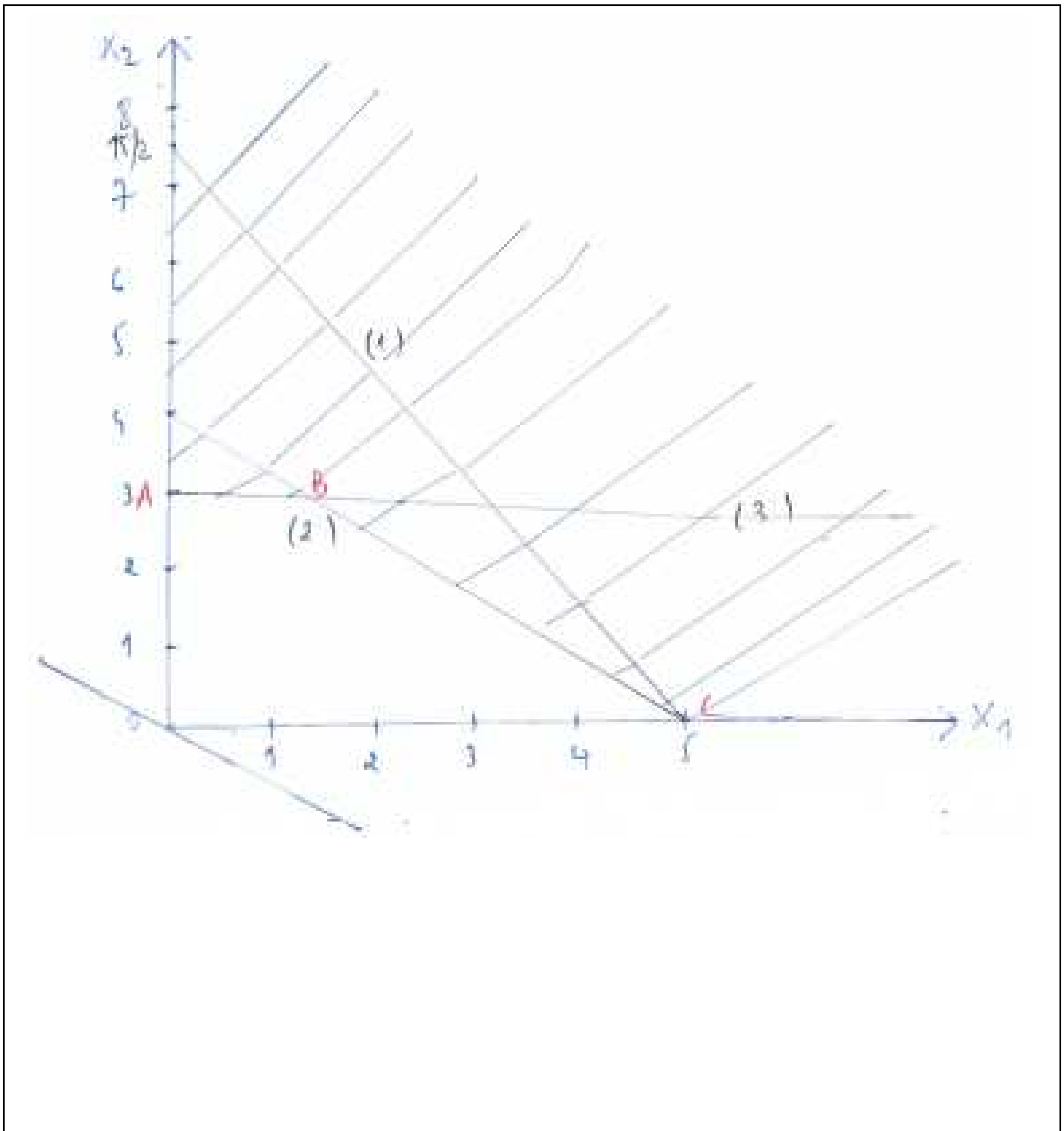
$X_1= 0 , X_2= 15/2 \qquad X_2= 0 , X_1= 5$

- من المعادلة الثانية:

$X_1 = 0$, $X_2 = 4$ $\qquad$ $X_2 = 0$, $X_1 = 5$

- من المعادلة الثالثة:

$X_2 = 3$



3- نتأكد من مجموعة النقاط التي تطابق كل قيد على حدى، وهي توجد إلى يسار المستقيم في مثالنا (القيود أقل من) : نبدأ من نقطة الأصل (0 ،0) ونعوض في القيد، فإذا حققت النقطة الشرط ، فهذا يدل على أن كل النقاط الموجودة مابين نقطة الأصل وخط الدالة المعنية تطابق القيد ، فمثلا بالنسبة للمتراجحة

$6X_1+4X_2\leq 30$ ، إذا جربنا عملية التعويض بقيم 0 لـ X_1 و X_2 نجد 0 وهو أقل من 30 ، وهذا معناه أن النقاط مابين نقطة الأصل (0 ، 0)، وخط الدالة (1) تحقق الشرط لأن $30 > 0$ صحيح. وبهذا نقوم بشطب كل النقاط التي لا تطابق القيد، وهكذا بالنسبة لبلقي القيود.... .

وبهذا نحصل على منطقة تسمى بمنطقة الحلول العملية الممكنة ، وهي عل شكل شبه منحرف (0ABC):إن أي نقطة في هذه المنطقة تمثل حلا ممكنا، أي زوج القيم (X_1 ,X_2) الذي يحقق كل القيود في آن واحد .

4- نبحث عن الحل الامثل والذي يقع دائما على ركن أو أكثر من أركان منطقة الحلول الممكنة:

- نقوم بتمثيل دالة الهدف بيانيا، ثم نرسم خطوطا موازية لها بنفس الميل ، في مثالنا آخر ركن عل الشكل (0ABC) يمر به خط موازي لدالة الهدف يكون الحل الأمثل: بوضع دالة الهدف :

$2X1+3X_2= 0$: $X_2= -2/3X_1$

ولتحديد نقاط التقاطع مع المحورين نجد أن:

$X_1= 0$; $X_2= 0$

من خلال الشكل نلاحظ أن آخر نقطة يمر بها الخط الموازي لدالة الهدف هي النقطة B ، وبهذا نقول أن النقطة B هي نقطة الحل الأمثل. مادامت النقطة B تمثل تقاطعا للدالتين(2) و (3) ، فلإيجاد إحداثياتها نقوم بحل هاتين المعادلتين:

$X_2= 3$; $X_1= 5/4$

- بتعويض إحداثيات كل الأركان (0ABC) في دالة الهدف نحصل على قيمة هذه الأخيرة، والحل الأمثل يكون في المنطقة التي تعطينا أكبر قيمة لدالة الهدف:

أركان منطقة الحلول الممكنة	X1	X2	دالة الهدف Z
0	0	0	0
A	0	3	9
B	5/4	3	23/2
C	5	0	10

بمقارنة قيمة Z عند كل ركن نجد أن الركن هو الذي يحقق أكبر ربح، وها يعني أنه يجب على المؤسسة أن تنتج (إذا فرضنا أن المسألة مسألة إنتاج) في ظل الموارد المتاحة 3 وحدات من النوع الثاني و 5/4 وحدة من النوع الأول ، حتى تحقق أقصى ربح ممكن 23/2 و.ن .

المحاضرة 2

ج$_2$– طريقة السمبلكس: تستعمل الطريقة البيانية فقط في الحالات التي تحتوي فيها المسألة عل متغيرين فقط، ولكن في الحياة العملية تكون المسائل بأكثر من متغيرين في غالب الأحيان خاصة تلك البرامج المتعلقة بالعمليات الإنتاجية، أين يكون عدد المتغيرات كبيرا جدا، لهذا فان استعمال طريقة الرسم البياني للحل تكون غير ممكنة. وأمام هذه الصعوبة نلجأ عادة إلى طريقة السمبلكس لمعالجة هذا النوع من المسائل، والتي تكون في شكل جدول ، إذ يتم الانتقال من جدول إلى آخر عن طريق عمليات حسابية إلى أن نصل إلى الجدول الأخير والذي يمثل الحل الأمثل .

وحتى نتمكن من استخدام هاته الطريقة لابد من ضع البرنامج الخطي في الصورة المعيارية أي تحويل المتراجحات (القيود) إلى معادلات، وذلك بإضافة متغيرات الفروق، حيث يوجد نوعان من هاته الفروق:

- متغيرات الطاقة العاطلة، وهي التي تضاف إلى المتراجحات من الشكل "أقل أو يساوي".
- متغيرات الفائض، وهي التي تطرح من المتراجحات من الشكل"أكبر أو يساوي".

سنشرح هذه الطريقة من خلال أمثلة خاصة قابلة للتعميم.

مثال 1: لاحظ بائع هدايا الطلب المتزايد على نوعين من العلب التي يحضرها:

- النوع الأول بـ 8 و.ن ويحتوي على 5 كؤوس كبيرة، و2 متوسطة، وكأس صغيرة.
- النوع الثاني بـ 6 و.ن ويحتوي عل 3كؤوس كبيرة، و3 متوسطة، و3 صغيرة.

وبفرض أنه لديه الموارد التالية: 30 كأس كبيرة، 24 كأس متوسطة، و18 كأس صغيرة: المطلوب كيفية التصرف لتحقيق أكبر ربح ممكن.

إن أول تصرف يمكن أن يقوم به البائع هو تحضير علب من النوع الأول فقط لأن ذلك يمكنه من الحصول على ربح أكبر، فيمكن عندئذ تحضير 5/30= 6 علب ، ويكون بذلك قد استعمل كل الكؤوس المتوفرة لديه من الحجم الكبير، و (2.6= 12) كأس متوسطة، و(1.6= 6) كأس صغيرة، فيكون العائد الذي يحصل عليه هو 8.6= 48و.ن . ولكن بهذا التصرف نرى أنه لم يستعمل كل الموارد المتوفرة لديه، حيث بقي عنده 12 كأسا متوسطة، و12 كأسا صغيرة.

والسؤال المطروح هو: هل هناك تصرفا آخر يمكنه من الاستعمال الأمثل لهذه الموارد ويزداد معه ربحه؟

- نفترض أن X_1، X_2 ، هي كميات العلب المحضرة من النوع الأول والثاني على التوالي، فعندئذ يكون التابع المراد تعظيمه ممثلا للربح (العائد الكلي) على الشكل التالي:

$$Z = 8X_1+6X_2$$

كما يمكن لصاحب المحل تحضير:

$5X_1+3X_2$: من الكؤوس الكبيرة

$2X_1+3X_2$: من الكؤوس المتوسطة

X_1+3X_2: من الكؤوس الصغيرة

ولما كانت الموارد محدودة (بالنسبة للكؤوس) ، فلا يمكنه استعمال أكثر من 30 كأسا كبيرا، وأكثر من 24 كأسا متوسطا ، وأكثر من 18 كأسا صغيرا. وهذا ما نعبر عنه رياضيا بالقيود أو الشروط التالية:

$$5X_1+3X_2\leq 30$$

$$2X_1+3X_2\leq 24$$

$$X_1+3X_2\leq 18$$

- يتمثل حل المسألة المطروحة في البحث عن زوج القيم غير السالبة (X_1 , X_2) والذي يعظم ربح البائع(Z)، وهذا ماعبرنا عنه بالبحث عن البرنامج الأمثل لتحضير العلب، ولإيجاد هذا الأخير وفق طريقة السمبلكس نقوم بمايلي:

❖ ننطلق من البرنامج الخطي السابق:

$$Max\ Z = 8X_1+6X_2$$

تحت القيود:

$$5X_1+3X_2\leq 30$$

$$2X_1+3X_2\leq 24$$

$$X_1+3X_2\leq 18$$

❖ نضع الصيغة المعيارية للنموذج:

$$MaxZ= 8X_1+6X_2+0X_3^e + 0X_4^e + 0X_5^e$$

تحت القيود:

$$5X_1+3X_2+ X_3^e = 30$$

$$2X_1+3X_2+X_4^e = 24$$

$$X_1+3X_2+X_5^e = 18$$

- متغيرات الطاقة العاطلة هي متغيرات الأساس، وتساوي في الجدول الأول (عند الحل الابتدائي) قيم الثوابت (الموارد).
- المتغيرات الحقيقية هي متغيرات خارج الأساس (قيمها في الجدول الأول معدومة).
- قيمة دالة الهدف أيضا معدومة.

المحاضرة 3

❖ جدول الحل الأساسي الأول: مصفوفة القيود تتضمن مصفوفة أحادية:

النسبة	الثوابت	X_5^e	X_4^e	X_3^e	X_2	X_1		متغيرات
30/5=6	30	0	0	1	3	5	X_3^e	
24/2=12	24	0	1	0	3	2	X_4^e	الأساس
18/1=18	18	1	0	0	3	1	X_5^e	
قيمة الدالة	0	0	0	0	6	8	Z	

❖ المتغيرة التي تدخل الأساس هي المقابلة لأكبر قيمة في سطر الدالة الاقتصادية: المتغيرة المقابلة للقيمة"8" (X_1) : عمود عنصر الارتكاز هو العمود الأول.

❖ المتغيرة التي تخرج من الأساس هي المقابلة لأصغر نسبة موجبة من بين النسب المحصل عليها عند تقسيم عمود الثوابت عل عمود عنصر الارتكاز، وهي القيمة 6، وعليه فالمتغيرة التي تخرج من الأساس هي X_3^e : سطر عنصر الارتكاز هو السطرالأول . ويكون عنصر الارتكاز هو القيمة التي يتقاطع عندها عمود عنصر الارتكاز مع سطر الارتكاز، أي القيمة 5.

❖ نجري التحويلات التالية للحصول على جدول الحل الأساسي الثاني:

- نقسم سطر عنصر الارتكاز على عنصر الارتكاز.
- يتحول عمود عنصر الارتكاز إلى عمود أحادي : قيمة عنصر الارتكاز تصبح 1 بموجب التحويل أعلاه، أما بقية عناصر العمود فتتحول إل أصفار.
- بقية أعمدة متغيرات الأساس تبقى أحادية .
- بقية عناصر الجدول تحسب بطريقة المستطيلات:

العنصر الجديد = العنصر القديم– جداء الطرفين/عنصر الارتكاز

- ✓ (2،2): 3- 5/3.2 =5/9
- ✓ (2،3): 0- 5/1.2 =-5/2
- ✓ (6،2): 24- 5/30.2 = 12
- ✓ (2،3): 3- 5/3.1 =5/12
- ✓ (3،3): 0- 5/1.1 =-5/1
- ✓ (6.3): 18- 5/30.1 =12
- ✓ (2.4): 6- 5/3.8 =5/6
- ✓ (3.4): 0- 5/1.8 =-5/8
- ✓ (4،4): 0- 5/0.8 =0
- ✓ (5،4): 0- 5/0.8 =0
- ✓ (6،4): 0- 5/30.8 =-48

	X_1	X_2	X_3^e	X_4^e	X_5^e	الثوابت	النسبة
X_1	1	3/5	1/5	0	0	6	6/3/5=10
X_4^e	0	9/5	-2/5	1	0	12	12/9/5=20/3
X_5^e	0	12/5	-1/5	0	1	12	12/12/5=5
Z	0	6/5	-8/5	0	0	-48	

❖ السؤال المطروح : هل توصلنا إلى الحل الأمثل؟ مادامت هناك قيما أكبر من الصفر في السطر الأخير (سطر معاملات الدالة)، فإن الحل الأمثل لم يتحقق بعد، وعليه نبدأ من جديد ونتبع نفس الخطوات السابقة لنحصل في الأخير على الجدول التالي:

	X_1	X_2	X_3^e	X_4^e	X_5^e	الثوابت
X_1	1	0	1/4	0	-1/4	3
X_4^e	0	0	-1/4	1	-3/4	3
X_2	0	1	-1/12	0	5/12	5
Z	0	0	-3/2	0	-1/2	-54

- كل معاملات الدالة الاقتصادية (السطر الأخير) أصبحت سالبة، وبالتالي فإن هذا الجدول هو الجدول الحل الأمثل.
- $Z = 8X_1+6X_2 = 8\ .3 + 6\ .5 = 54$
- النتائج المحصل عليها:

$X_1 = 3$

$X_4^e = 3$

$X_2 = 5$

هذه النتائج تحقق القيد الأول والثالث تماما، أما القيد الثاني فيحتوي عاى طاقة عاطلة قيمتها 3 (بقي لدينا 3 كؤوس من النوع المتوسط) وتعبر عنها متغيرة الفرق $X_4^e = 3$. ويمكن إثبات ذلك من خلال التعويض في القيود:

$5X_1 + 3X_2 \leq 30 : 5.3 + 3.5 = 30$: قيد محقق تماما.

$2X_1+3X_2 \leq 24 : 2.3 + 3.5 = 24$: قيد غير محقق تماما وبقيت طاقة غير مستغلة قدرها 3 وهي قيمة متغيرة الفرق المضافة أي $X_4^e = 3$.

$X_1+3X_2 \leq 18 : 3 + 3.5 = 18$: قيد محقق تماما.

محاضرة 4

مثال 2 : أوجد حلا للبرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 10X_2$$

تحت القيود :

$$5X_1 + 6X_2 \geq 10$$

$$2X_1 + 7X_2 \geq 14$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

- البحث عن الصيغة النموذجية (المعيارية)، بحيث نوجد مصفوفة للقيود تتضمن مصفوفة أحادية . وحيث أن القيود هي من الشكل "أكبر أو يساوي" فغننا نستعمل متغيرات الفروق في إيجاد المساواة والمتغيرات الاصطناعية (الوهمية) في إيجاد المصفوفة الأحادية:

$$\text{MinZ} = 3X_1 + 10X_2 + 0X_3^e + MX_4^a + 0X_5^e + MX_6^a$$

تحت القيود التالية:

$$5X_1 + 6X_2 - X_3^e + X_4^a = 10$$

$$2X_1 + 7X_2 - X_5^e + X_6^a = 14$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3^e \geq 0, X_4^a \geq 0, X_5^e \geq 0, X_6^a \geq 0$$

- من مجموعة القيود نستخرج قيم المتغيرات الاصطناعية ونعوضها في دالة الهدف كمايلي:

$$X_4^a = 10 - 5X_1 - 6X_2 + X_3^e$$

$$X_6^a = 14 - 2X_1 - 7X_2 + X_5^e \qquad \rightarrow$$

$$\text{MinZ} = 3X_1 + 10X_2 + M(10 - 5X_1 - 6X_2 + X_3^e) + M(14 - 2X_1 - 7X_2 + X_5^e)$$

$$\text{MinZ} = (3 - 7M)X_1 + (10 - 13M)X_2 + MX_3^e + MX_5^e + 24M$$

عند $Z = 0$ نجد:

$$(3 - 7M)X_1 + (10 - 13M)X_2 + MX_3^e + MX_5^e = -24M$$

- نشكل جدول الحل الأساسي الأول:

	X_1	X_2	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	الثوابت
X_4^a	5	6	-1	1	0	0	10
X_6^a	2	7	0	0	-1	1	14
Z	3-7M	10-13M	M	0	M	0	-24M

- المتغيرة التي تدخل الأساس هي التي يكون لها أصغر معامل سالب في الدالة الاقتصادية: المتغيرة X_2:

العمود الذي تنتمي إليه X_2 هو عمود عنصر الارتكاز، أما المتغيرة التي تخرج فهي المقابلةلأصغر نسبة موجبة ناتجة عن تقسيم عمود الثوابت على عمود عنصر الارتكاز، وهي في السطر الأول . يسمى هذا السطر بسطر عنصر الارتكاز، ويكون عنصر الارتكاز هو القيمة 6 الموجودة عند تقاطع عمود عنصر الارتكاز مع سطر عنصر الارتكاز.

- نجري التحويلات كما جرت في حالة التعظيم، فنحصل على الجدول التالي:

	X_1	X_2	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	الثوابت
X_2	5/6	1	-1/6	/	0	0	10/6
X_6^a	-23/6	0	7/6	/	-1	1	7/3
Z	(23M-32)	0	(10-7M/6)	/	M	0	(-14M-100)/6

عناصر عمود المتغيرة الاصطناعية X_4^a التي خرجت من الأساس لم يتم حسابها وتم الاستغناء عنها لأن الخوارزمية لايمكن أن تدخلها الأساس مر ثانية.

- هل هذا الحل أمثل؟ إنه ليس كذلك لأن معاملات الدالة الاقتصادية ليست كلها موجبة أو معدومة، وبالتالي ينبغي تحسين الحل.

- نعيد نفس الخطوات السابقة ابتداءا من الخطوة 4 :

❖ المتغيرة المرشحة للدخول هي X_3^e ، والمتغيرة المرشحة للخروج هي X_6^e (الافتراض هو أن قيمة M كبيرة جدا وهي أساسا قيمة مساعدة خارج النظام، وهذا مايجعلها تزاح في النهاية كلية بفعل منطق الخوارزمية المتبعة في الحل).

❖ بإجراء التحويلات اللازمة نحصل على الجدول التالي:

	X_1	X_2	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	الثوابت
X_2	2/7	1	0	/	-1/7	/	2
X_3^e	-23/7	0	1	/	-6/7	/	2
Z	1/7	0	0	/	10/7	/	-20

-كل معاملات الدالة الاقتصادية أصبحت غير سالبة: وصلنا للحل الأمثل وهو:

$X_1 = 3$

$X_2 = 2$

$X_3^e = 2$

أما بقية المتغيرات فهي معدومة، وقيمة الدالة الاقتصادية: $Z = |-20| = 20$

ويمكن التأكد من صحة الحل في القيود والدالة حيث نجد :

❖ عند القيد الأول : $5X_1 + 6X_2 \geq 10 :\ 0+6.2 = 12 > 10$

وهو قيد محقق، الفرق يعبر عن متغيرة الفائض المطروحة $_3^e = 2$.

❖ عند القيد الثاني : $2X_1 + 7X_2 \geq 14 :\ 0+7.2 = 14$

وهوقيد محقق تماما.

❖ بالتعويض في دالة الهدف نجد :

$\text{Min } Z = 3X_1 + 10X_2 = 0+10.2 = 20$

المحاضرة5

تحليل المدخلات والمخرجات

يعتبر تحليل المدخلات والمخرجات طريقة أساسية في الاقتصاد الكمي، وهي تصف العلاقات المتبادلة بين القطاعات الإنتاجية في اقتصاد ما بواسطة جدول المدخلات والمخرجات. وهو الإسم المعطى لإطار تحليلي طور من طرف الاقتصادي "فاسيلي ليونتيف" في أواخر 1930، وهو العمل الذي حاز به على جائزة نوبل لعلم الاقتصاد في عام 1937.

1- خصائص جدول المدخلات – المخرجات:

يصف جدول المدخلات والمخرجات العملية المعقدة للانتاج ، وكيف أن ناتج قطاع ما هو مدخلات لقطاعات أخرى، ويصور كذلك كيفية استعمال السلع والخدمات في توليد الدخل والقيمة المضافة داخل القطاعات المختلفة.

يصف جدول المدخلات والمخرجات تدفق السلع والخدمات بين القطاعات المختلفة للاقتصاد الإقليمي أو الوطني، ومحاولات لقياس العلاقة بين صناعة معينة وصناعات أخرى في الاقتصاد.

"ليونتيف" عرض هذه المعلومات المحاسبية والإحصائية على شكل مصفوفة حيث يرصد ناتج القطاع في سطره المرافق له، أما مدخلاته فترصد في عمود القطاع. هاته المصفوفة تمثل الروابط بين موارد اقتصاد ما وانفاقه، فهي تصف الطريقة التي يلبي بها النظام الانتاجي الطلب النهائي (استهلاك، واستثمار، وتصدير).

يقوم نموذج المدخلات والمخرجات على أساس تساوي المدخلات الكلية مع المخرجات الكلية في الاقتصاد الوطني. وعلى هذا الأساس يتم افتراض أن انتاج كل قطاع ينقسم إلى قسمين أساسيين:

أ- مخرجات تستخدم كمدخلات وسيطة للقطاع نفسه، أو كمدخلات وسيطة للقطاعات الأخرى.

ب – مخرجات تستخدم كمنتج نهائي للاستهلاك المحلي والتصدير، وتسمى الطلب النهائي.

يستخدم هذا النموذج في التنبؤ بمتطلبات الانتاج اللازمة لاشباع الطلب، كما يعطي صورة مفصلة عن هيكل الاقتصاد الوطني والتي تستخدم في إعداد الحسابات الوطنية.

2- فرضيات النموذج:

يستند تحليل نموذج المدخلات – المخرجات على عدة فرضيات فرضتها البيانات التطبيقية ومشاكل الحساب أهمها:

أ- عدم وجود منتجات مشتركة ، أي أن كل قطاع ينتج منتوجا متجانسا واحدا.

ب- كل صناعة تستخدم معدلا ثابتا من المنتج (يشتمل على عدة سلع تنتج بنسب ثابتة) لانتاج منجاتها.

جـ- ثبات المعاملات الفنية a_{ij} (كم i : المدخل لانتاج وحدة واحدة من j : المخرج)، وهذا يقودنا لافتراض آخر وهو أن مدخلات الانتاج تستخدم بنسب ثابتة، وأنه يستخدم أسلوب فني واحد لانتاج أي سلعة من السلع المنتجة في القطاع: فرضية ثبات التقنية.

د- ثبات الأسعار النسبية لمستلزمات الانتاج بمعنى أن تكون أسعار كل المدخلات والمخرجات معروفة ومحددة، وغير قابلة للتغيير في المدى القصير، لأن أي تغيير في الأسعار النسبية يؤدي إلى تغيير في نسب مزج المدخلات مما يجعل الفرضية الثالثة غير محققة.

هـ- الطلب النهائي معلوم.

و- زيادة الطاقة الانتاجية في إحدى القطاعات بنسب معينة تؤدي بالنتيجة إلى زيادة مشترياته من القطاعات الأخرى بنفس النسبة.

3- بناء نموذج المدخلات – المخرجات:

يعتمد بناء نموذج المدخلات – المخرجات على العلاقات الاقتصادية التي تمثل التوازن العام للطلب على سلعة ما، وعرض تلك السلعة في السوق وفي فترة زمنية معينة.

يأخذ جدول المدخلات – المخرجات الصورة العامة التالية:

قطاعات الاقتصاد الوطني	القطاعات المستهلكة – الطلب الوسيط –					الاستهلاك الوطني	الانتاج الإجمالي
	1	2	3		n		
القطاعات	X_{11}	X_{12}	X_{13}	..	X_{1n}	Y_1	X_1
	X_{21}	X_{22}	X_{23}	..	X_{2n}	Y_2	X_2
المنتجة	:	:	:	..		:	:
	X_{n1}	X_{n2}	X_{n3}	..	X_{nn}	Y_n	X_n
القيمة المضافة	V_1	V_2	V_3	..	V_n	$\sum_{j=1}^{n} V_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i$	
الانتاج الإجمالي	X_1	X_2	X_3		X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$

أ – عند النظر إلى الجدول من زاوية العرض (حسب الأسطر)، يمكن استخراج المعادلات التالية:

$$X_{11} + X_{12} + \cdots X_{1n} + Y_1 = X_1$$

$$X_{21} + X_{22} + \cdots X_{2n} + Y_2 = X_2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \rightarrow$$

$$X_{n1} + X_{n2} + \cdots X_{nn} + Y_n = X_n$$

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_i$$

ب– بالنظر إلى الجدول من زاوية الطلب: (حسب الأعمدة)، يمكن أن نستخرج المعادلات التالية:

$$X_{11} + X_{21} + \cdots + X_{n1} + V_1 = X_1$$

$$X_{12} + X_{22} + \cdots + X_{n2} + V_2 = X_2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \rightarrow$$

$$X_{1n} + X_{2n} + \cdots + X_{nn} + V_n = X_n$$

$$X_j = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + V_j$$

بجمع أسطر الجدول نجد:

$$\sum X_i = \sum \sum X_{ij} + \sum Y_i$$

وبجمع أعمدة الجدول نحصل على:

$$\sum X_j = \sum \sum X_{ij} + \sum V_J$$

وعليه فإن :

$$\sum \sum X_{ij} + \sum Y_i = \sum \sum X_{ij} + \sum V_J \quad \rightarrow$$

$$\sum Y_i = \sum V_j \quad \rightarrow$$

الاستهلاك النهائي في المجتمع يتطابق مع القيمة الجديدة المولدة من عملية الإنتاج.

المحاضرة 6

4- مصفوفة المعاملات الفنية المباشرة للانتاج:

يطلق على العناصر a_{ij} اسم المعاملات الفنية المباشرة للانتاج أي:

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$$

وهي تعني مقدار المدخلات اللازمة من إنتاج القطاع (i) لانتاج وحدة واحدة من القطاع (j).

خصائص المعاملات الفنية:

- $0 \leq a_{ij}$ من أجل جميع قيم i و j .
- ليس لها وحدة قياس .
- $a_{ij} < 1$.
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = [a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}] \leq 1$
  - $\sum a_{ij} = 0$: الاستهلاك النهائي من منتجات هذا القطاع معدوم، أي كل ما انتج استهلك في صورة مستلزمات وسيطة.
  - $\sum a_{ij} < 1$: عملية الانتاج لا يمكن أن تتم بدون قيمة مضافة.
  - $a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j} \rightarrow X_{ij} = a_{ij}$

ومنه يمكن كتابة جملة المعادلات من منظور العرض (حسب الأسطر) كمايلي:

$$X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n + Y_1$$

$$X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n + Y_2$$

$$\vdots$$

$$X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nn}X_n + Y_n$$

يمكن صياغة هاته العلاقة عل شكل مصفوفات:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1m} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$X = AX + Y \Rightarrow X - AX = Y \Rightarrow X[I - A] = Y \Rightarrow$$

$$X = \frac{Y}{I - A} = [I - A]^{-1} Y \,/\, [I - A]^{-1} = \frac{1}{|I - A|} \operatorname{adj}[I - A]$$

تمرين: بافتراض أن اقتصادا ما مكونا من قطاعين، والتدافقات القطاعية بينهما موضحة في الجدول التالي:

المخرجات / المدخلات	الطلب الوسيط A	الطلب الوسيط B	الطلب النهائي Y	الناتج الكلي X
A	15,50	3,25	20	38,75
B	7,75	9,75	15	32,50
C عوامل أخرى	15,50	19,50	—	35
إجمالي الاستخدامات	38,75	32,50	35	106,25

المطلوب: إيجاد الناتج الكلي عندما يزداد الطلب النهائي في القطاعين ليصبح: $Y_A = 30$ (و) $Y_B = 25$، ثم كون الجدول على ضوء النتائج الجديدة.

- نستخرج مصفوفة المعاملات الفنية:

(نسب إنتاج القطاع إلى إجمالي الاستخدامات) $a_{iJ} = \frac{X_{iJ}}{X_J}$

$$A = \begin{bmatrix} 15,50/38,75 & 3,25/32,50 \\ 7,75/38,75 & 9,75/32,50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: القطاع (C): عوامل الإنتاج أخرى أضعه في مصفوفة المعاملات الفنية لأنه قطاع مفتوح ليس له طلب نهائي، و يعامل في هذه الحالة كقطاع يستخدم منتجات القطاعين (B, A) و يمثل مجموع الاستخدامات الموجودة في أسفل الجدول.

• نستخرج مصفوفة ليونتيف:

$$* \ [I-A]=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0,4&0,1\\0,2&0,3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,6&-0,1\\-0,2&0,7\end{bmatrix}$$

$$* \ |I-A|=(0,6\times0,7)-(-0,2\times-0,1)=0,42-0,02$$

$$|I-A|=0,4$$

$$* \ adj\,(I-A)=\begin{bmatrix}0,7&0,1\\0,2&0,6\end{bmatrix}$$

نقلب مواقع عناصر القطر الرئيسي و نغير إشارة (-) عناصر القطر الثانوي

$$* \ [I-A]^{-1}=\frac{1}{|I-A|}\,adj\,[I-A]$$

$$[I-A]^{-1}=\frac{1}{0,4}\begin{bmatrix}0,7&0,1\\0,2&0,6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1,75&0,25\\0,50&1,50\end{bmatrix}$$

• عند تغير الطلب النهائي:

$$\begin{bmatrix}X_A\\X_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1,75&0,25\\0,50&1,50\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30\\25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1,75\times30+0,25\times25\\0,5\times30+1,50\times25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}58,75\\52,50\end{bmatrix}$$

• إعادة صياغة الجدول:

* حساب مقدار المدخلات والمخرجات للقطاعين (B, A) والقطاع المفتوح من خلال القيم الجديدة (X_B , X_A)، باعتبار أن المصفوفة

(A) يشترط فيها البيانات في نموذج ليونتيف :

$$X_{11} = 0,4 \times 58,75 = 23,50$$
$$X_{12} = 0,1 \times 52,50 = 5,25$$
$$X_{21} = 0,2 \times 58,75 = 11,75$$
$$X_{22} = 0,3 \times 52,50 = 15,75$$

المخرجات / المدخلات	الطلب الوسيط A	الطلب الوسيط B	الطلب النهائي	الناتج الكلي
A	23,50	5,25	30	58,75
B	11,75	15,75	25	52,50
C	23,50	31,50	-	55
إجمالي الاستخدامات	58,75	52,50	55	166,25